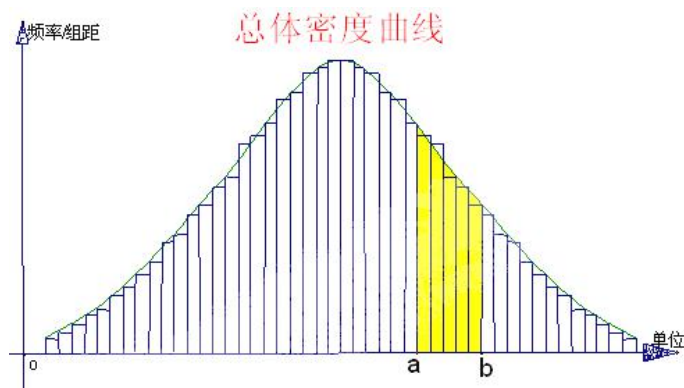


# 正态分布

1. 随着试验次数的增加，频率直方图的形状会越来越像一条钟形曲线。

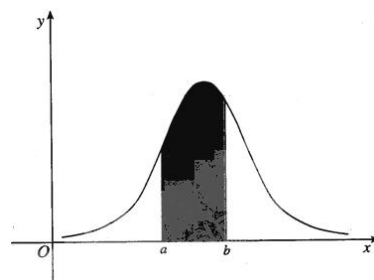


这条曲线可以近似下列函数的图像：
$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in (-\infty, +\infty)$$

其中实数  $\mu$  和  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) 为参数，我们称  $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$  的图像为正态分布密度曲线，简称正态曲线。

问：(1) 随机变量  $X$  落在区间  $(a, b]$  的概率为什么？其几何意义是什么？

(2) 正态曲线  $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$  中的参数  $\mu$  和  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) 的意义是什么？



例 1. 设随机变量  $X$  的正态分布密度函数  $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$  则参数

$\mu$  和  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) 的值分别是\_\_\_\_\_。

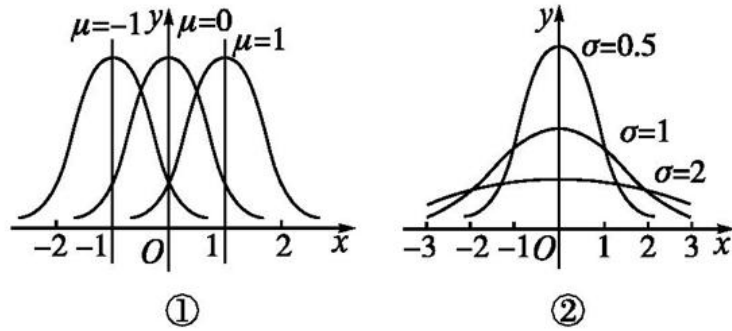
2. 一般地，如果对于任何实数  $a < b$ ，随机变量  $X$  满足  $P(a < X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx$

则称  $X$  服从正态分布。

正态分布完全由参数  $\mu$  和  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) 确定，因此正态分布常记作  $N(\mu, \sigma^2)$ ，如果随机变量  $X$

服从正态分布，则记为  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

3. 正态曲线有以下特点



- (1) 曲线位于  $x$  轴 \_\_\_\_\_, 与  $x$  轴 \_\_\_\_\_;
- (2) 曲线是单峰的, 它关于直线 \_\_\_\_\_ 对称;
- (3) 曲线在 \_\_\_\_\_ 处达到峰值  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ;
- (4) 曲线与  $x$  轴之间的面积为 \_\_\_\_\_;
- (5) 当  $\sigma$  一定时, 曲线随着  $\mu$  的变化而沿 \_\_\_\_\_ 平移;
- (6) 当  $\mu$  一定时, 曲线的形状由  $\sigma$  确定,  $\sigma$  越小, 曲线越 \_\_\_\_\_, 表示总体的分布越集中;  $\sigma$  越大, 曲线越 \_\_\_\_\_, 表示总体的分布越分散。

例 2. 设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 且  $P(X \leq C) = P(X > C)$ , 则  $C = ( \quad )$

- A. 0            B.  $\sigma$
- C.  $-\mu$         D.  $\mu$

4. 若  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则对于任何实数  $a > 0$ , 概率  $P(\mu - a < X \leq \mu + a) = \int_{\mu-a}^{\mu+a} \varphi_{\mu, \sigma}(x) dx$

特别地有:

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$$

$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$$

$$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$$

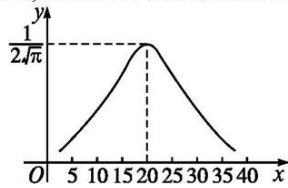
正态变量在  $(-\infty, +\infty)$  内的取值的概率为 1, 正态总体几乎总取值于区间  $(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma)$  之内。而在此区间以外取值的概率只有 0.0026, 通常认为这种情况在一次试验中几乎不可能发生。因此在实际应用中, 通常认为服从于正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  的随机变量  $x$  只取  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  之间的值, 简称之为  $3\sigma$  原则

问：如何求服从正态分布的随机变量  $x$  在某区间内取值的概率？

例 3. 正态总体  $N(4,4)$  在区间  $(2,6]$  内取值的概率为\_\_\_\_\_.

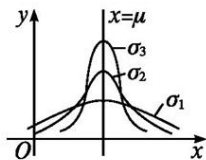
例 4.

如图所示的是一个正态曲线,试根据该图象写出其正态分布的概率密度函数的解析式,求出总体随机变量的期望和方差.



例 5.

如图是正态分布  $N(\mu, \sigma_1^2), N(\mu, \sigma_2^2), N(\mu, \sigma_3^2)$  ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 > 0$ ) 相应的曲线,那么  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  的大小关系是( )



- A.  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$     B.  $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$   
 C.  $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$     D.  $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$

例 6.

已知随机变量  $X$  服从正态分布  $N(2, \sigma^2), P(X < 4) = 0.84$ , 则  $P(X \leq 0) =$  ( )

- A. 0.16                  B. 0.32  
 C. 0.68                  D. 0.84

例 7.

若随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(0,1)$ , 已知  $P(\xi < -1.96) = 0.025$ , 则  $P(|\xi| < 1.96) =$  ( )

- A. 0.025                  B. 0.050  
 C. 0.950                  D. 0.975

例 8. 设  $X \sim N\left(0, \frac{1}{4}\right)$ , 则  $P(-1 < X < 1)$  的值为\_\_\_\_\_.

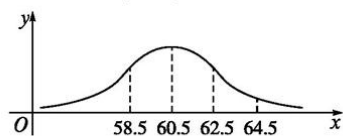
例 9. 在某次数学考试中, 考生的成绩  $\xi$  服从一个正态分布, 即  $\xi \sim N(90, 100)$ 。

(1) 试求考试成绩  $\xi$  位于区间 (70, 110) 上的概率是多少?

(2) 若这次考试共有 2000 名考生, 试估计考试成绩在 (80, 100) 间的考生大约有多少人?

例 10.

为了了解某地区高三男生的身体发育状况, 抽查了该地区 1000 名年龄在 17.5 岁至 19 岁的高三男生的体重情况, 抽查结果表明他们的体重  $X(\text{kg})$  服从正态分布  $N(\mu, 2^2)$ , 且正态分布密度曲线如图所示. 若体重大于 58.5 kg 小于等于 62.5 kg 属于正常情况, 则这 1000 名男生中属于正常情况的人数是( )



- A. 997      B. 954  
C. 819      D. 683

## 课后作业

1. 设随机变量  $X \sim N(1, 2^2)$ , 则  $D\left(\frac{1}{2}X\right) = ( \quad )$

A. 4                      B. 2

C.  $\frac{1}{2}$                       D. 1

2. 已知随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(0, \sigma^2)$ , 若  $P(\xi > 2) = 0.023$ , 则

$P(-2 \leq \xi \leq 2) = ( \quad )$

A. 0.447                      B. 0.628

C. 0.954                      D. 0.977

3. 在某项测量中, 测量结果  $\xi$  服从正态分布  $N(1, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ ). 若  $\xi$  在  $(0, 1)$  内取值的概率为 0.4, 则  $\xi$  在  $(0, 2)$  内取值的概率为\_\_\_\_\_.

4. 一批灯泡的使用时间  $X$  (单位: 小时) 服从正态分布  $N(10000, 400^2)$ , 则这批灯泡使用时间在  $(9200, 10800]$  内的概率是\_\_\_\_\_.

5. 某年级的一次信息技术测验成绩近似服从正态分布  $N(70, 10^2)$ , 如果规定低于 60 分为不及格, 求:

(1) 成绩不及格的人数占多少?

(2) 成绩在 80~90 分内的学生占多少?